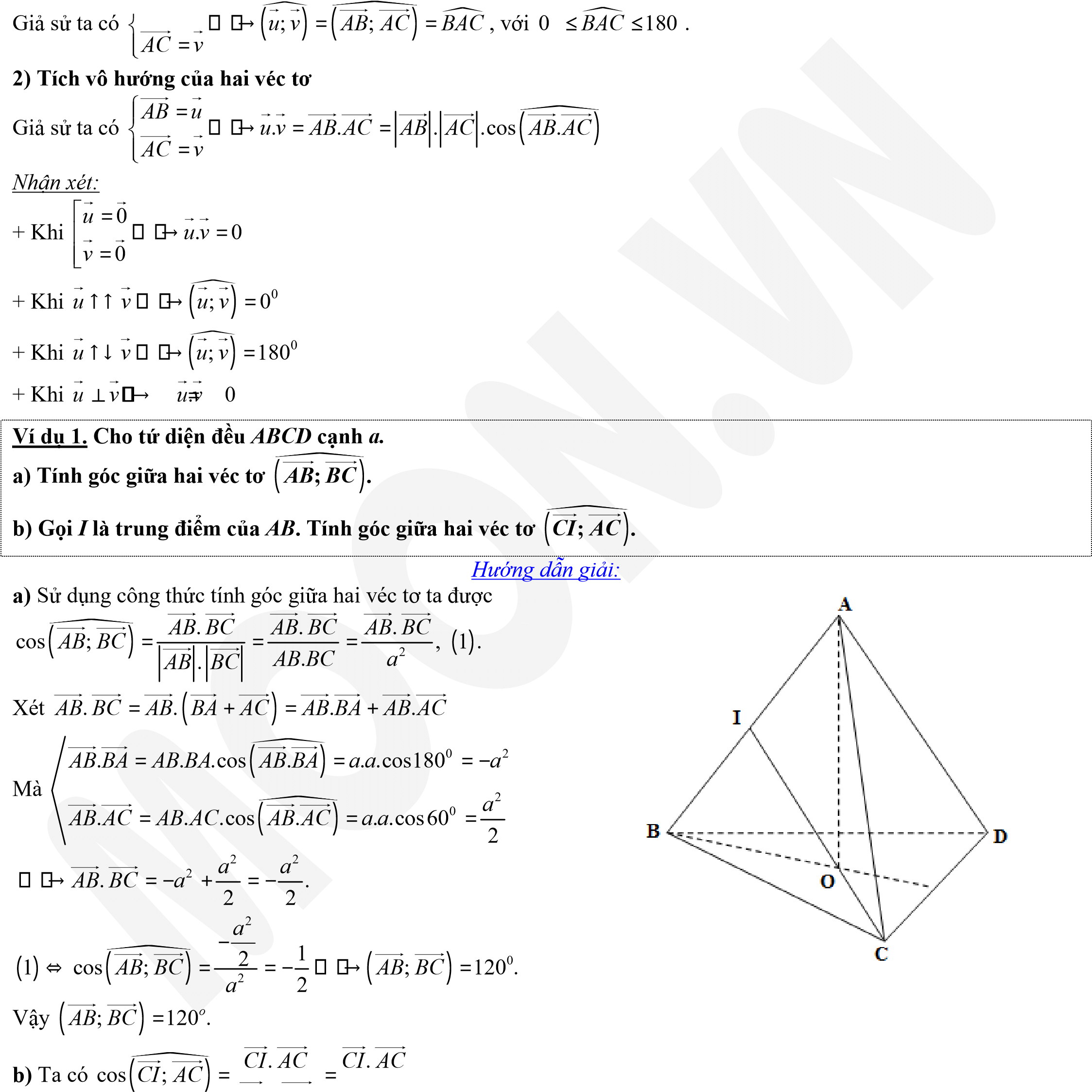
Tài liệu tham khảo:

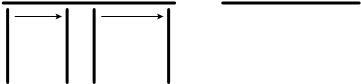
# **GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG 01. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG**

**Thầy Đặng Việt Hùng**

**I. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉC TƠ TRONG KHÔNG GIAN**

**1) Góc giữa hai véc tơ**

*AB* = *u o o*

 *CI* . *AC CI AC*.

Tứ diện *ABCD* đều cạnh *a*, *CI* là trung tuyến của tam giác đều *ABC* nên *CI* = *a* 3 →cos(*CI AC*; ) = *CI AC*. , ( )2 .

2

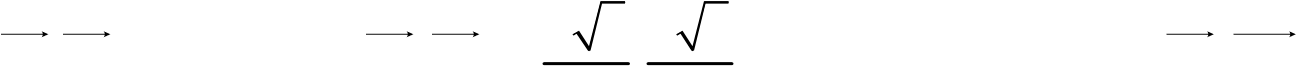
2

3

*a*

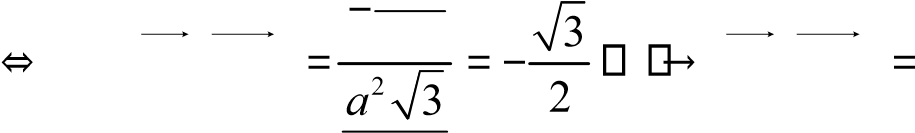
2 Ta có *CI AC*. = *CI*.(*AI* + *IC*) = *CI AI*. + *CI IC*.

Do ∆*ABC* đều nên *CI* ⊥ *AI* ⇔ *CI AI*. = 0.

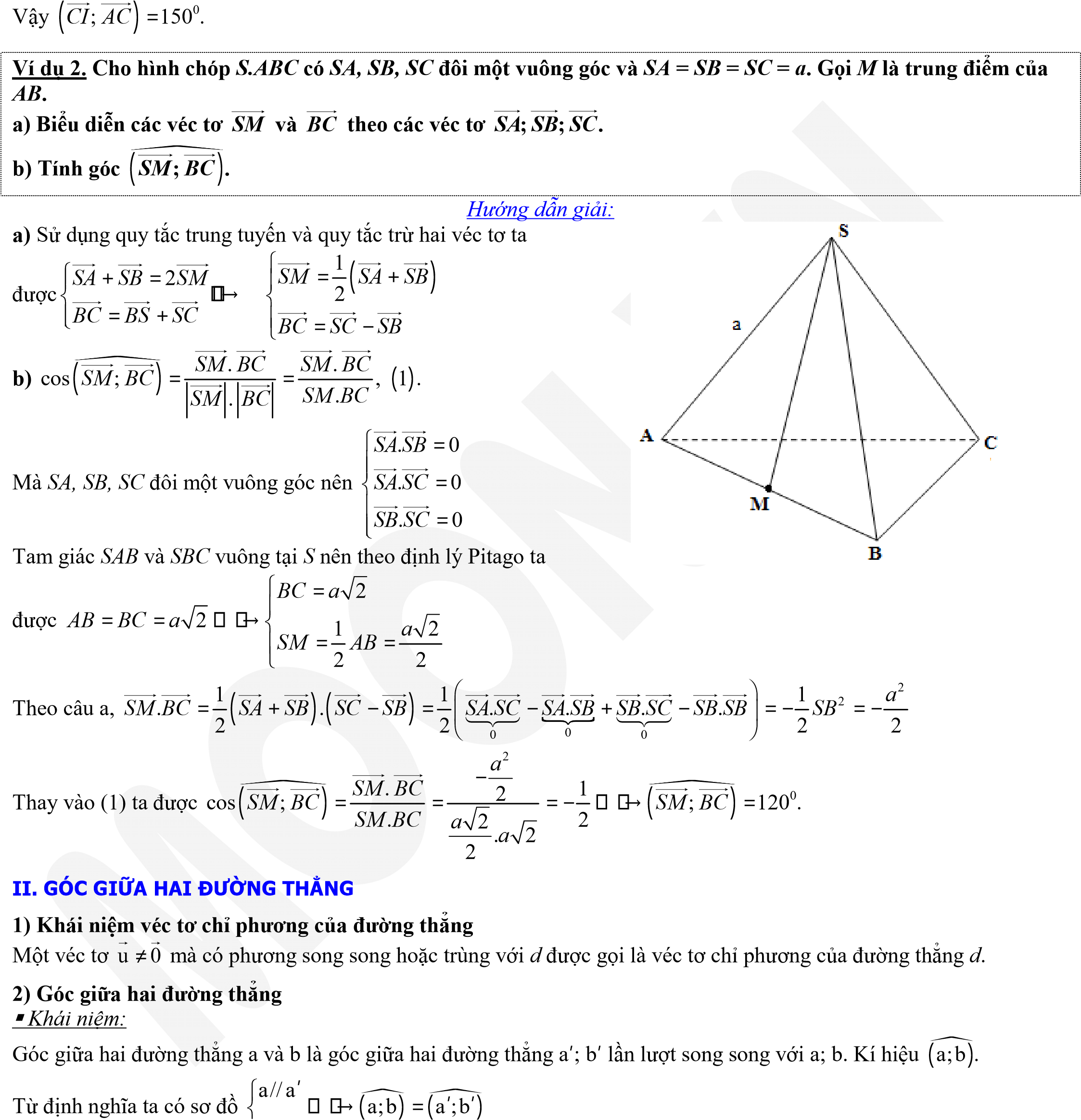
Đồng thời, *CI IC*. = *CI IC*. .cos(*CI IC*; ) = *a* 3 .*a* 3.cos1800 = −3*a*2 →*CI AC*. = 0 − 3*a*2 = −3*a*2 .

2 2 4 4 4

3*a*2

Thay vào (2) ta được ( )2 ⇔ cos(*CI AC*; ) = 4 →(*CI AC*; ) =150 .0

2



b//b′  *Nhận xét:*

+ Giả sử a, b có véc tơ chỉ phương tương ứng là u; v và (u; v) = φ.

(a; b)= φ ; 0o ≤ ≤φ 90o

Khi đó,

(a; b)=180o −φ ; 90o < φ ≤180o

+ Nếu a // b hoặc a ≡ b thì (a; b)= 0 .o

*Các xác định góc giữa hai đường thẳng:*

**Phương án 1** (sử dụng định nghĩa) **Phương án 2**

a // a′- Lấy một điểm O bất kì thuộc a

Tạo ra các đường  →(a,b) = (a ,b′ ′)

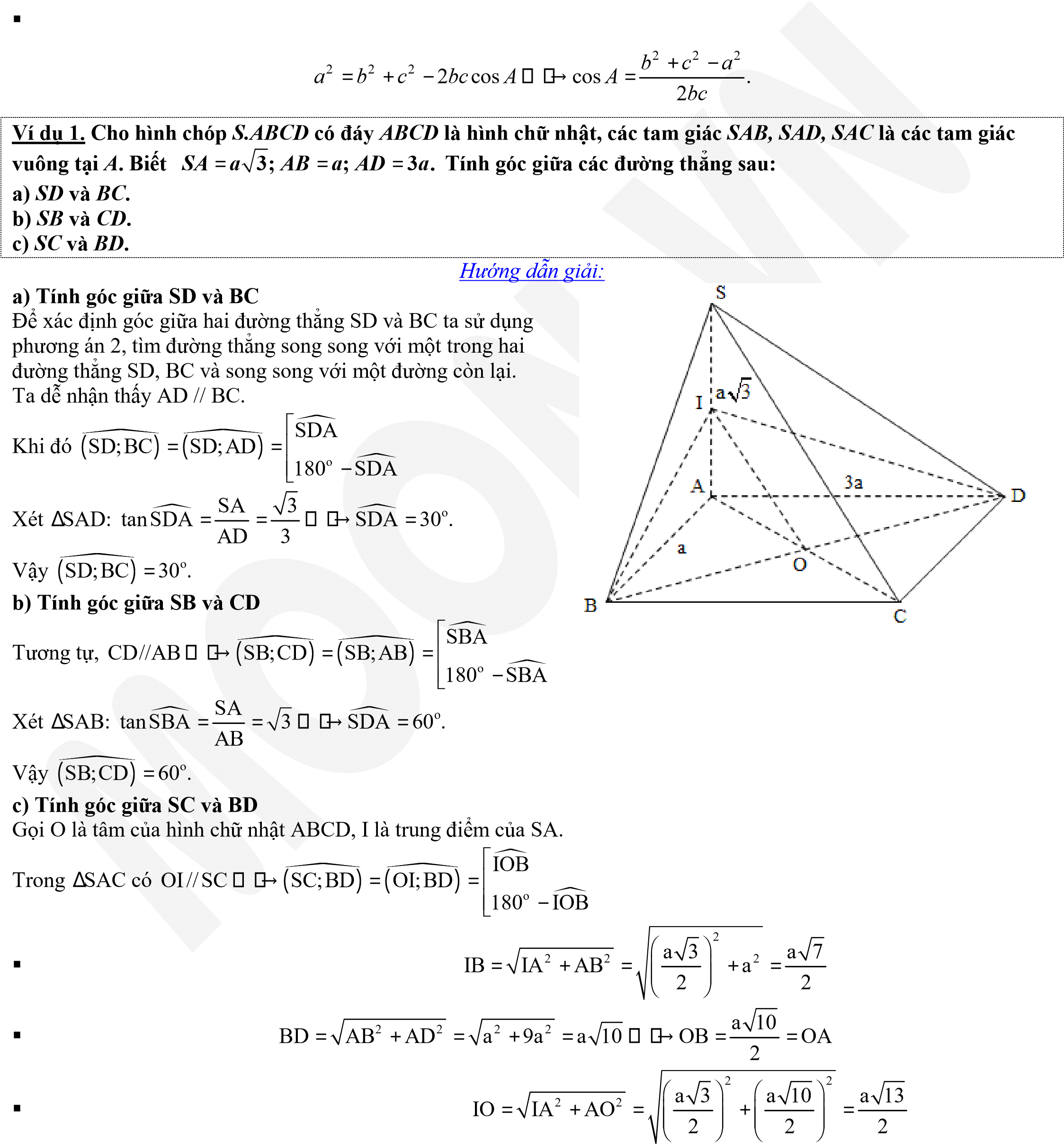
b // b′

- Qua O, dựng đường ∆ // b →(a,b) = (a,∆)

**Chú ý:**

*Các phương pháp tính toán góc giữa hai đường thẳng:*

Nếu góc thuộc tam giác vuông thì dùng các công thức tính toán trong tam giác vuông: sin, cosin, tan, cot.

 Nếu góc thuộc tam giác thường thì sử dụng định lý hàm số cosin trong tam giác *ABC*:

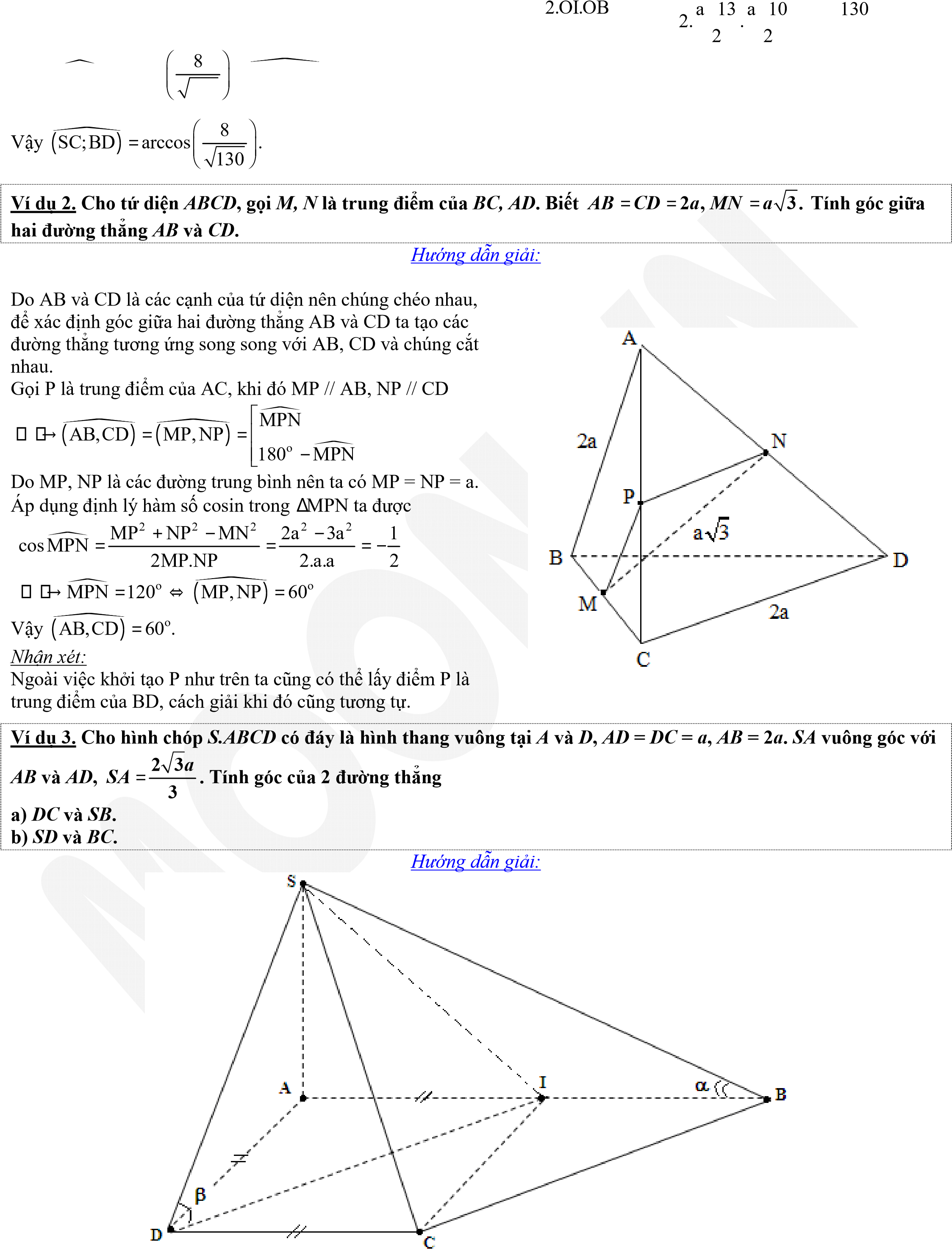
Áp dụng định lý Pitago cho tam giác vuông ABI: IB =

ABCD là hình chữ nhật nên BD =

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác vuông ABO: IO =

13a2 10a2 7a2

Khi đó, theo định lý hàm số cosin cho ∆IOB ta được: cosIOB = OI2 + OB2 − IB2 = 4 + 4 − 4 = 8

→ IOB = arccos = (SC;BD .)

130

1. Do DC//AB→ (DC,SB) = (AB,SB) = α

Tam giác SAB vuông tại A nên α là góc nhọn, khi đó tanα = SA → =α 30o

2

3

a

3

3

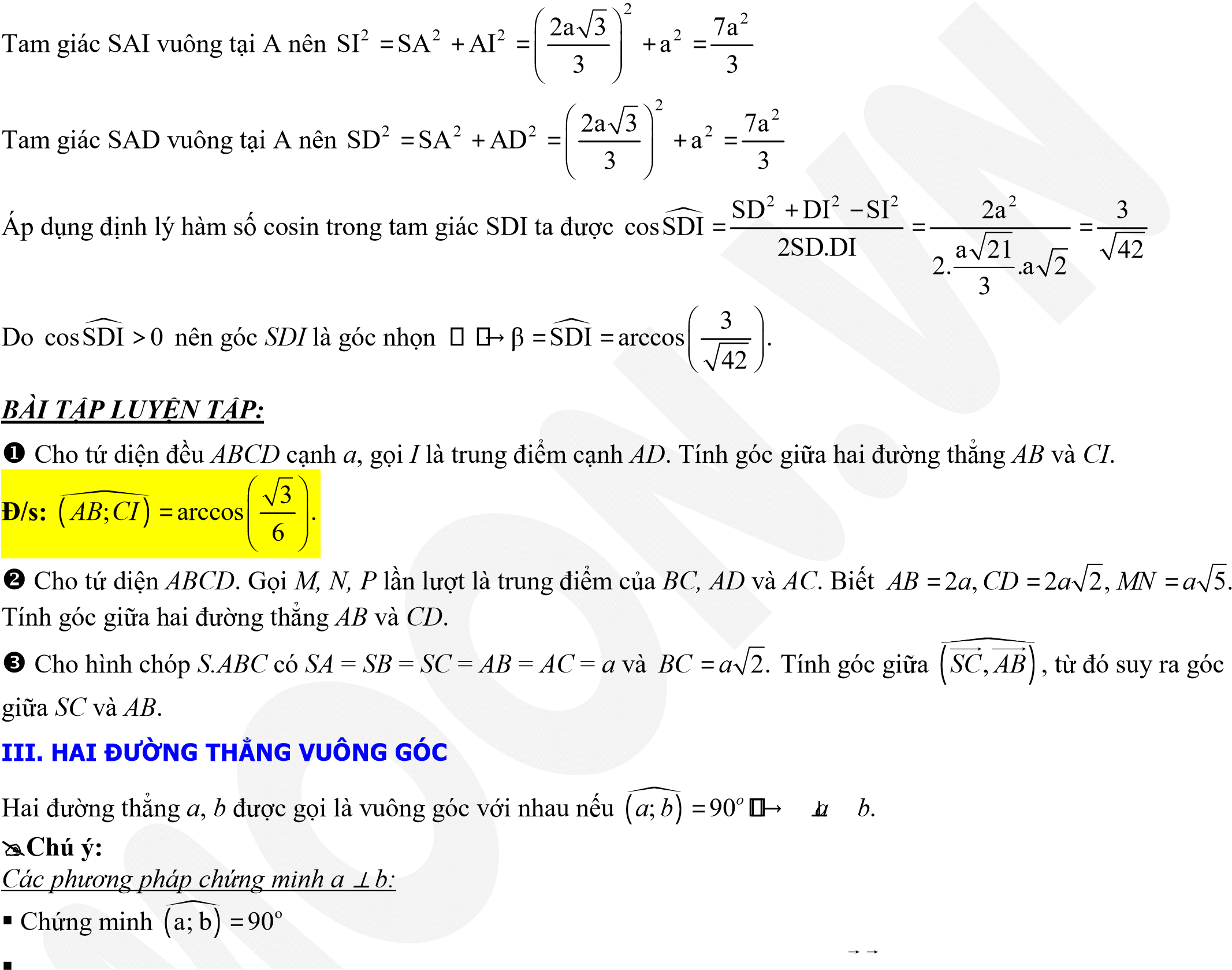
=

=

AB 2a 3

Vậy góc giữa hai đường thẳng DC và SB bằng 30o.

1. Gọi I là trung điểm của AB, khi đó AI = a. Tứ giác ADCI là hình bình hành (do AI // DC), có AI = AD = a nên là hình thoi. Lại có góc A, D vuông nên ADCI là hình vuông cạnh a → =DI a 2. mặt khác, tứ giác BIDC là hình bình hành (do cặp cạnh DC và BI song song và bằng nhau) nên BC // DI. Khi đó, (SD,BC)=(SD,DI)=β .

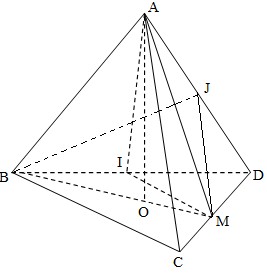
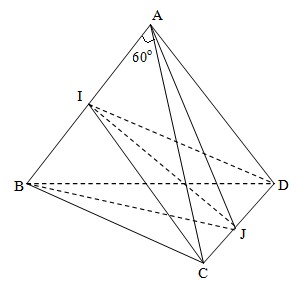
 Chứng minh hai véc tơ chỉ phương của hai đường thẳng vuông góc với nhau, u.v = 0.

Chứng minh hai đường thẳng có quan hệ theo định lý Pitago, trung tuyến tam giác cân, đều...

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1. C~~ho tứ diện ABC~~D trong đó AB** = **AC** = **AD** = **a, BAC** = **60o, BAD** = **60o, CAD** = **90 .o Gọi I và J lần lượt là trung điể~~m của A~~B và CD.**  **a) Chứng min~~h~~ r~~ằ~~ng IJ vuông góc với cả hai đường AB và CD. b) Tính độ dài IJ.** |
|
|

*Hướng dẫn giải:*

|  |
| --- |
| b) Áp dụng định lý Pitago cho ∆AIJ vuông tại I ta được  2 |
|
| IJ =  2  2  2  a2  a  a  AJ  AI      −  =  −  =         |
|  2  4 2  ậ |
| V y IJ = a/2. |
| **Ví dụ 2.** **Cho hình chóp tam giác S.ABC có SA = SB = SC và ASB** ~~=~~ **BSC** = **CSA.** |
| **Chứng minh rằng SA** ⊥ **BC, SB** ⊥ **AC, SC** ⊥ **AB.** |
| *Hướng dẫn giải:* |
| Chứng minh: SA ⊥ BC. |
| Xét SA.BC =SA. SC( −SB) =SA.SC −SA.SB  SA.SC = SA.SC.cos SA;SC( )  Mà SA.SB =SA.SB.cos SA;SB( ) →SA.SC = SA.~~SB ⇔ SA.SC −SA.SB =~~ 0~~→~~ SA.BC= ⇔0 SA⊥ BC |
|
|
|
| SA = SB =SC  ASB = BSC = CSA  Chứng minh tương tự ta cũng được SB ⊥ AC, SC ⊥ AB |
|
|
|
| **Ví dụ 3. Cho tứ diện đều *ABCD*, cạnh bằng *a*. Gọi *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp** ∆***BCD*. ứ ớ** |
| 1. **Ch ng minh *AO* vuông góc v i *CD*.** 2. **Gọi *M* là trung điểm của *CD*. Tính góc giữa** |
| ***BC* và *AM*. *AC* và *BM*.** |
|
| *Hướng dẫn giải:*  **a)** Sử dụng phương pháp dùng tích vô hướng Gọi M là trun~~g điểm của C~~D. Ta có  AO.CD = (AM + MO .CD) = AM.CD + MO.CD  Do ABCD là tứ diện đều nên AM ⊥ CD và O là tâm đáy (hay O là gia~~o điểm của ba đườn~~g cao). Khi đó  AM ⊥ CD AM.CD = 0 |
|

**a)** Từ giả thiết ta dễ dàng suy ra tam giác ABC, ABD đều, ∆ACD vuông cân tại A.

Từ đó BC = BD = a,CD = a 2 →∆BCD vuông cân tại B.

*Chứng minh IJ vuông góc với AB*

Do các ∆ACD, ∆BCD vuông cân tại A, B nên

 1

AJ = 2CD →AJ = BJ ⇔ IJ ⊥ AB.

BJ = 1 CD

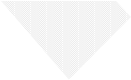
 2

*Chứng minh IJ vuông góc với CD*

Do các ∆ACD, ∆BCD đều nên CI = DI → IJ ⊥CD.

 ~~⇔ ~~ →AO.CD = 0 ⇔ AO ⊥ CD.

MO ⊥ CD MO.CD = 0

**b)** Xác định góc giữa BC và AM; AC và BM  *Xác định góc giữa BC và AM:*

Gọi I là trung điểm của BD → MI // BC.

# AMI

Từ đó (BC;AM) = (MI;AM) = 

180 − AMI

Áp dụng định lý hàm số cosin trong ∆AMI ta được

cosAMI = AM2 + MI2 − AI2 , ( )1 .

2.AM.MI

Các ∆ABD, ∆ACD đều, có cạnh a nên AI = AM = a 3 .

2

MI là đường trung bình nên MI = a/2.

a2 3a2 3a2

4 + 4 − 4 = 1 →AMI = arccos 1  ⇔ (BC;AM) = arccos 1 .

Từ đó ( )1 ⇔ cosAMI =

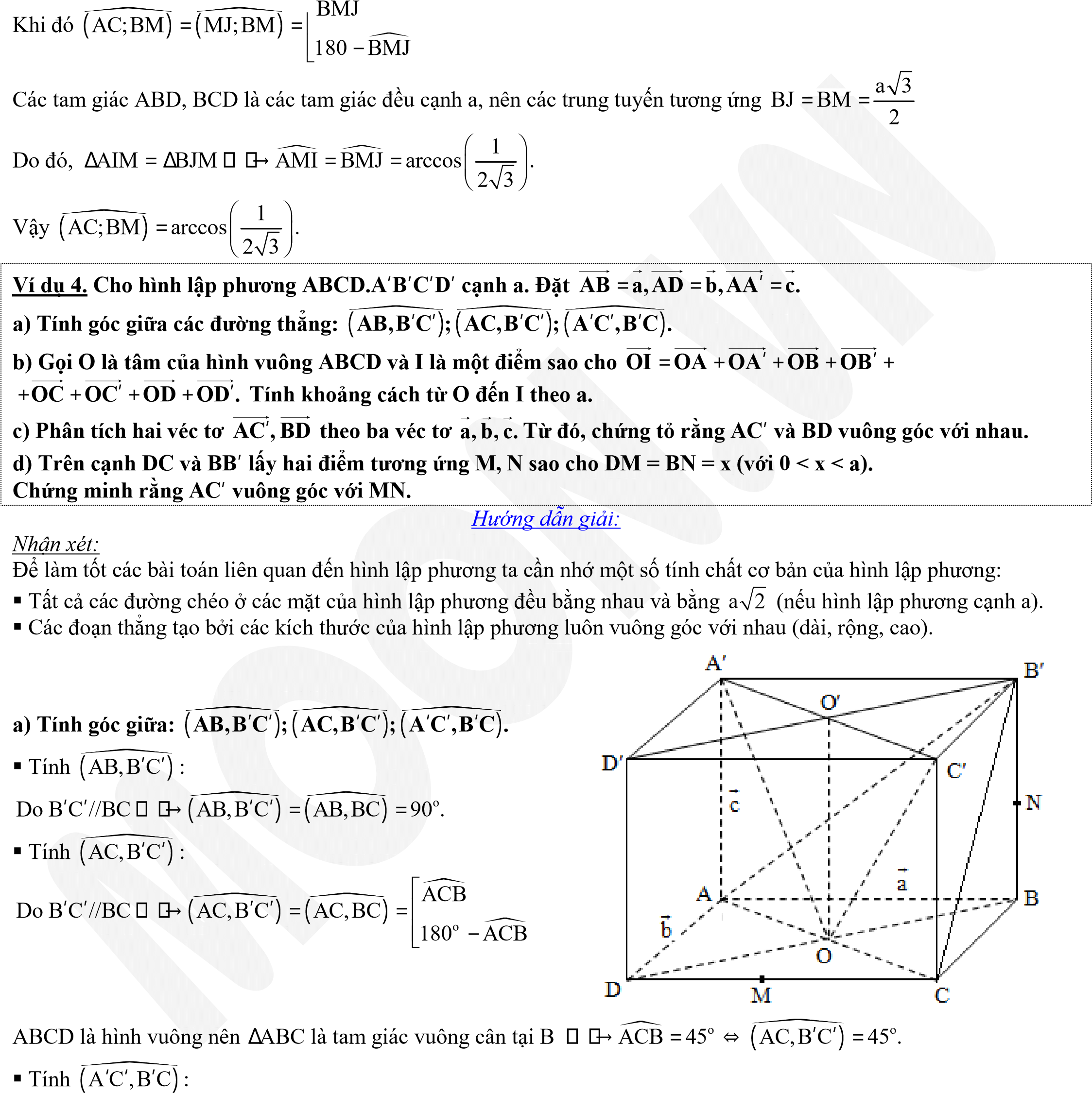
a a 3 2 3  2 3   2 3 

2. .

2 2

*Xác định góc giữa BC và AM:*

Gọi J là trung điểm của AD → MJ // AC.



# ACB′

Do A C //AC′ ′ →(A C ,B C′ ′ ′ ) = (AC,B C′ ) = 

180o − ACB′

Xét trong tam giác ACB′ có AC = B′C = AB′ (do đều là các đường chéo ở các mặt hình vuông của hình lập phương). Do đó ∆ACB′ đều →ACB′ = 60o ⇔ (A C ,B C′ ′ ′ ) = 60 .o

**b) Tính độ dài OI theo a.**

OA + OC = 0

Với O là tâm của hình vuông ABCD thì  →OA + OC + OB + OD = 0

OB+ OD = 0

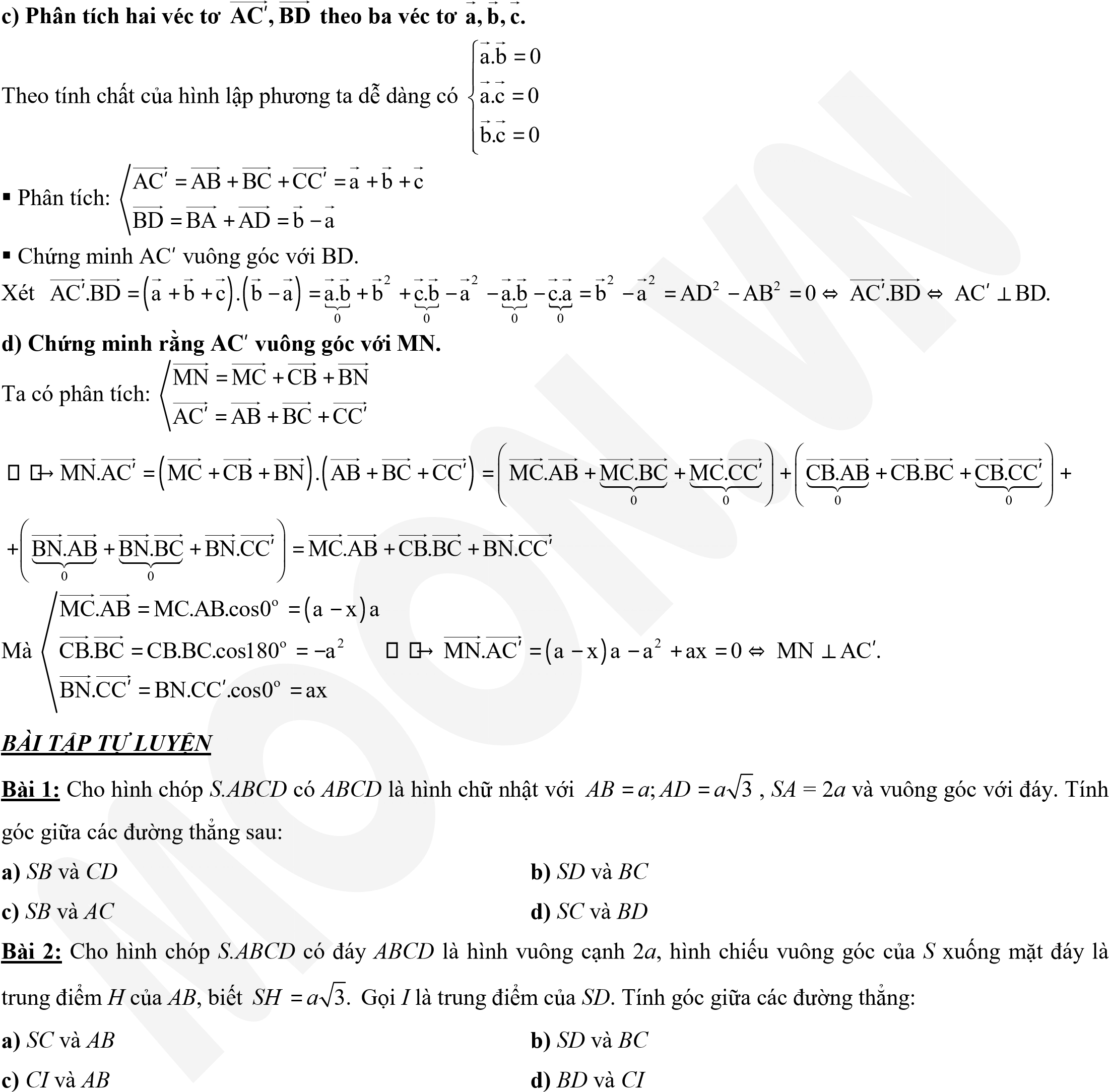
Khi đó OI = OA′+ OB′+ OC′+ OD′

OA′+ OC′ = 2OO′

Gọi O′ là tâm của đáy A′B′C′D′, theo quy tắc trung tuyến ta có  →OI = 4OO′

OB′+ OD′ = 2OO′

Khoảng cách từ O đến I chính là độ dài véc tơ OI, từ đó ta được OI = 4OO′ = 4a.

  







**Bài 3:** Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A, B* với *AB* = 3*a*, *AD* = 2*a*, *DC* = *a*. Hình chiếu vuông góc của *S* xuống mặt phẳng (*ABCD*) là *H* thuộc *AB* với *AH* = 2*HB*, biết *SH* = 2*a*. Tính góc giữa

1. *SB* và *CD*
2. *SB* và *AC*